PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD MATEMÁTICAS II DE ANDALUCÍA
CURSO 2002-2003.

Opción A

Ejercicio 1 de la Opción A del modelo 5 de 2003.

Sea la función $f : R \to R$ definida por $f(x) = \begin{cases} x^2+3 & \text{si } x \le 1 \\ 2\text{-}x^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$.

(a) [1'25 puntos] Calcula, si es posible, las derivadas laterales de *f* en *x* = 1.
(b) [1'25 puntos] Halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función *f*.

Solución

$f(x) = \begin{cases} x^2+3 & \text{si } x \le 1 \\ 2\text{-}x^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$.

(a)
Como nos piden las derivadas laterales en x = 1, estudiemos primero la continuidad lateral en x = 1.
Veamos como es la iguraldad $f(1) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x)$.

$f(1) = (1)^2 + 3 = 4$
$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (2 - x^2) = 2 - 4 = - 2$.
$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (x^2 +3) = (1)^2 + 3 = 4$

Como $f(1) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = 4$, la función es continua a la izquierda de x = 1 ($x = 1^-$)

Como $f(1) = 4 \neq \lim_{x\to 1^+} f(x) = - 2$, la función no es continua a la derecha de x = 1 ($x = 1^+$), por tanto tampoco es derivable a la derecha de x = 1, es decir no existe $f'(1^+)$.

Veamos la derivada a la izquierda de x = 1.
$f'(1^-) = \lim_{h\to 0^-} [f(1 + h) – f(1)] / h = \lim_{h\to 0^-} [(1 + h)^2 + 3 – 4]/h =$
$= \lim_{h\to 0^-} [1 + 2h + h^2 + 3 – 4]/h = \lim_{h\to 0^-} [h(2 + h)] / h = \lim_{h\to 0^-} [(2 + h)] = 2 + 0 =0.$
Luego la derivada a la izquierda de 1 es $f'(1^-) = 2$.
La función derivada es $f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \le 1 \\ -2x & \text{si } x > 1 \end{cases}$.

(b)
Veamos la monotonía
Si $x \le 1$, $f'(x) = 2x$
Igualando a cero $f'(x)$
$2x =0$, de donde $x =0$

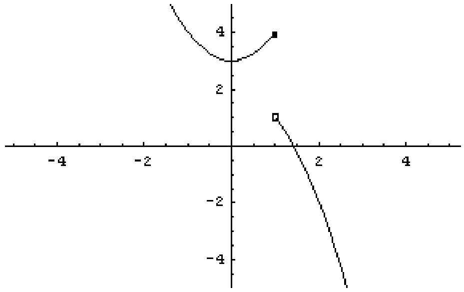
Si $- \infty < x < 0$, $f'(x) < 0$, luego f(x) es decreciente en $- \infty < x < 0$.
Si $0 \le x \le 1$, $f'(x) > 0$, luego f(x) es creciente en $0 \le x \le 1$.

Si $x >1$, $f'(x) = -2x$
Igualando a cero $f'(x)$
$-2x =0$, de donde $x =0$

Si Si $x >1$, $f'(x) < 0$, luego f(x) es decreciente en $x >1$.

Resuymiendo f(x) es crfeciente en [0,1] y decreciente en $(- \infty, 0) \cup (1, + \infty)$
Por definición x = 0 es un mínimo relativo.

Aunqure no la piden la grafíca de f(x) es

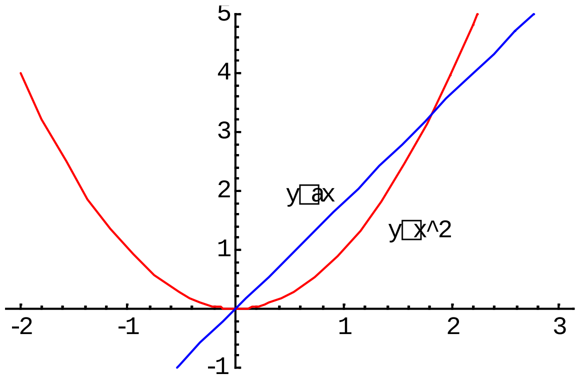


Ejercicio 2 de la Opción A del modelo 5 de 2003.

[2'5 puntos] Determina el valor positivo de λ para el que el área del recinto limitado por la parábola $y = x^2$ y la recta $y = \lambda x$ es 1.

Solución

La recta $y = \lambda x$ pasa por el origen de coordenadas, como $\lambda > 0$ está en el primer cuadrante.
Las gráficas aproximadas son



Para calcular el áera igualamos las funciones para ver los puntos de corte
$x^2 = \lambda x$, de donde $x^2 - \lambda x = x(x - \lambda) = 0$, y las soluciones son $x = 0$ y $x = \lambda$.

Área = 1 = $\int_0^{\lambda} (\lambda x - x^2)\, dx = [\lambda x^2/2 - x^3/3]^{\lambda}_0 = \lambda^3/2 - \lambda^3/3 = \lambda^3/6$.

Tenemos $\lambda^3/6 = 1$, de donde $\lambda^3 = 6$ y la solución de λ es $\lambda = \sqrt[3]{6}$

Ejercicio 3 de la Opción A del modelo 5 de 2003.

Considera el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x + my - z &= -2 + 2my \\ mx - y + 4z &= 5 + 2z \\ 6x - 10y - z &= -1 \end{aligned}$$

(a) [1'5 puntos] Discute las soluciones del sistema según los valores de *m*.
(b) [1 punto] Resuelve el sistema cuando sea compatible indeterminado.

Solución

$$\begin{aligned} x + my - z &= -2 + 2my \\ mx - y + 4z &= 5 + 2z \\ 6x - 10y - z &= -1 \end{aligned}$$

(a)
Operando nos queda el sistema

$$\begin{aligned} x - my - z &= -2 \\ mx - y + 2z &= 5 \\ 6x - 10y - z &= -1 \end{aligned}$$

La matriz de los coeficientes es $A = \begin{pmatrix} 1 & -m & -1 \\ m & -1 & 2 \\ 6 & -10 & -1 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -m & -1 & -2 \\ m & -1 & 2 & 5 \\ 6 & -10 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

Det(A) = |A| = $\begin{vmatrix} 1 & -m & -1 \\ m & -1 & 2 \\ 6 & -10 & -1 \end{vmatrix}$ = { desarrollo por los adjunto de la primera fila } =

$= 1(21) - (-m)(-m-12) + (-1)(-10m+6) = - m^2 - 2m + 15$
Resolvemos la ecuación $- m^2 - 2m + 15 = 0$, y obtenemos como soluciones $m = 3$ y $m = -5$

Si m ≠ 3 y m ≠ -5, rango(A) = rango(A^*) = 3 y por el teorema de Rouche el sistema es compatible y determinado, teniendo solución única.

Si m = 3

$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 6 & -10 & -1 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & -2 \\ 3 & -1 & 2 & 5 \\ 6 & -10 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

En A como $\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$ = -1+9 = 8 ≠ 0, rango(A) = 2

En A^* como $\begin{vmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 3 & -1 & 5 \\ 6 & -10 & -1 \end{vmatrix}$ = 0, rango(A^*) = 2

Luego si m = 3 como rango(A) = rango(A^*) = 2, por el teorema de Rouche el sistema es compatible e indeterminado, teniendo infinitas solucviones. Lo resolveremos en el apartado (b).

Si m = -5

$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 \\ -5 & -1 & 2 \\ 6 & -10 & -1 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & -2 \\ -5 & -1 & 2 & 5 \\ 6 & -10 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

En A como $\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -5 & -1 \end{vmatrix}$ = -1+25 = 24 ≠ 0, rango(A) = 2

En A^* como $\begin{vmatrix} 1 & 5 & -2 \\ -5 & -1 & 5 \\ 6 & -10 & -1 \end{vmatrix}$ = 64 ≠ 0, rango(A^*) = 3

Luego si m = -5 como rango(A) = 2 ≠ rango(A^*) = 3, por el teorema de Rouche el sistema es incompatible.

(b)

Resolvemos el sistema para m = 3

Como rango(A) = rango(A^*) = 2, tenemos dos ecuaciones y dos incógnitas principales. Tomo las dos primeras ecuaciones que con las que he formado el menor de orden 2 distinto de cero.

Mi sistema es

x – 3y – z = -2

3x –y + 2z = 5 { 2ª + 1ª(-3) }

x – 3y – z = -2

8y + 5z = 11, de donde tomando z = λ tenemos 8y = 11 – 5z = 11 – 5λ, luego y = 11/8 – (5/8) λ

Análogamente x = 3y + z – 2 = 3[11/8 – (5/8) λ] + (λ) – 2 = 17/8 – (7/8) λ.

La solución del sistema es (x,y,z) = (17/8 – (7/8) λ, 11/8 – (5/8) λ, λ) con $\lambda \in \Re$

Ejercicio 4 de la Opción A del modelo 5 de 2003.

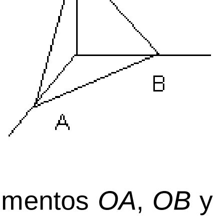
Se sabe que el plano Π corta a los semiejes positivos de coordenadas en los puntos *A*, *B* y *C*, siendo las longitudes de los segmentos *OA*, *OB* y *OC* de 4 unidades, donde *O* es el origen de coordenadas.

(a) [0'75 puntos] Halla la ecuación del plano Π.

(b) [1 punto] Calcula el área del triángulo *ABC*.

(c) [0'75 puntos] Obtén un plano paralelo al plano Π que diste 4 unidades del origen de coordenadas.

Solución



(a)

Como me dicen que las longitudes de los segmentos *OA*, *OB* y *OC* son de 4 unidades, me están dando las coordenadas de los puntos A, B y C. En concreto las coordenadas son:

A(4,0,0), B(0,4,0) y C(0,0,4)

Conociendo estos puntos podemos poner la ecuación segmentaria del plano que es:
$\Pi \equiv x/4 + y/4 + z/4 = 1$
(b)
El área del triángulo ABC es 1/2 del módulo del producto vectorial de los vectores **AB** y **AC**
AB = (-4,4,0)
AC = (-4,0,4)

AB x AC = $\begin{vmatrix} i & j & k \\ -4 & 4 & 0 \\ -4 & 0 & 4 \end{vmatrix}$ = **i**(16) – **j**(-16) + **k**(16) = (16,16,16)

Área = (1/2).| **AB x AC**| = (1/2). $\sqrt{16^2+16^2+16^2}$ = (1/2). $\sqrt{768}$ = $\sqrt{192}$ unidades de área (u.a.)
(c)
$\Pi \equiv x/4 + y/4 + z/4 = 1$ equivale a $\Pi \equiv x + y + z = 4$, donde su vector normal es **n** = (1,1,1).
Sabemos que si la ecuación del plano la dividimos por el módulo del vector normal |**n**|, el término independiente nos dá la distancia del plano al orignen de cordenadas
|**n**| = $\sqrt{1^2+1^2+1^2}$ = $\sqrt{3}$

$$\Pi \equiv \frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{y}{\sqrt{3}} + \frac{y}{\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

Este plano dista $\frac{4}{\sqrt{3}}$ unidades del origen.

Como me piden un plano que sea paralelo a Π y que diste 4 unidades del origen, tenemos dos planos que son $\Pi_1 \equiv \frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{y}{\sqrt{3}} + \frac{y}{\sqrt{3}} = 4$ y $\Pi_2 \equiv \frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{y}{\sqrt{3}} + \frac{y}{\sqrt{3}} = -4$

Ejercicio 1 de la Opción B del modelo 5 de 2003.

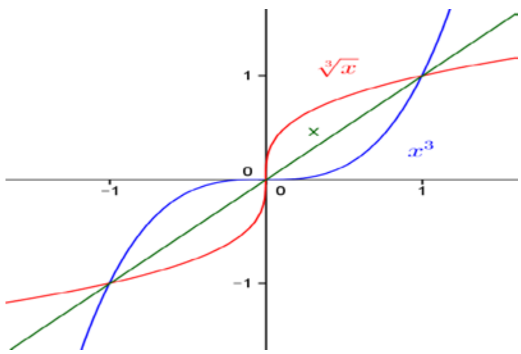
Sea $f : \Re \to \Re$ la función definida por f(x) = $\sqrt[3]{x}$.
(a) [0'5 puntos] Calcula la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa *x* = 1.
(b) [0'5 puntos] Esboza el recinto limitado por la gráfica de *f* y la recta tangente obtenida.
(c) [1'5 puntos] Calcula el área del recinto descrito en el apartado anterior.

Solución

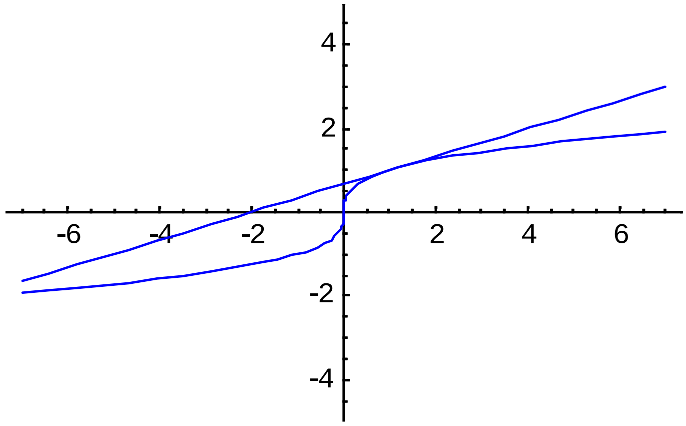
f(x) = $\sqrt[3]{x}$
(a)
La recta tangente en *x* = 1 es y – f(1) = f '(1)(x – 1)
f(x) = $\sqrt[3]{x}$, de donde f(1) = $\sqrt[3]{(1)}$ = 1

f '(x) = $\frac{1}{3(\sqrt[3]{x^2})}$ = $\frac{1}{3(\sqrt[3]{1^2})}$ = 1/3

La recta tangente en *x* = 1 es y – 1 = (1/3).(x – 1). Operando es y = (1/3).x + (2/3)
(b)
La gráfica de $\sqrt[3]{x}$ se calcula sabiendo que es la simétrica de la función x^3 (que es conocida). Sabemos que las gráficas de una fuinción y de su recíproca son simétricas respecto a la bisectriz del primer y tercer cuadrante (la recta y = x)
Las gráficas de $\sqrt[3]{x}$, x^3 y x son:



La gráfica de y = (1/3).x + (2/3) es la de una recta y con dos puntos es suficiente para dibujarla, por tanto la gráfica conjunta de $\sqrt[3]{x}$ y de (1/3).x + (2/3) es



(c)

Para calcular el área encerrada por ambas funciones tenemos que calcular los puntos de corte de ambas funciones igualándolas.

$\sqrt[3]{x}$ = (1/3).x + (2/3), de donde 3.$\sqrt[3]{x}$ = x + 2. Elevando al cubo ambas expresiones tenemos

$27x = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$, de donde $x^3 + 6x^2 - 15x + 8 = 0$

Factorizando tenemos (Lo hacemos por Ruffini, sabiendo que 1 es una solución común pues es donde se ha calculado la recta tangente)

$x^3 + 6x^2 - 15x + 8 = 0 = (x -1)(x^2 + 7x - 8) = 0$, de donde obtenemos

$x - 1 = 0$, y tiene por solución x = 1

$x^2 + 7x - 8 = 0$, que tiene de soluciones x = 1 y x = - 8

El área pedida es

Área = $\int_{-8}^{1}$ [((1/3).x + (2/3)) - $\sqrt[3]{x}$] dx = $[\, x^2/6 + (2/3)x - (x^{4/3})/(4/3)\,]_{-8}^{1}$ =

= (1/6 + 2/3 – 3/4) – (64/6 – 16/3 – (3/4).$\left(\sqrt[3]{-8}\right)^4$) = 6 ’ 75 unidades de área (u.a.)

Ejercicio 2 de la Opción B del modelo 5 de 2003.

Considera la función *f* definida para $x \neq 2$ por $f(x) = (2x^2 + 2)/(x + 2)$.

(a) [1’25 puntos] Halla las asíntotas de la gráfica de *f*.

(b) [1’25 puntos] Estudia la posición relativa de la gráfica de *f* respecto de sus asíntotas.

Solución

$f(x) = (2x^2 + 2)/(x + 2)$

(a)

Como $\lim_{x \to -2^+} f(x) = \lim_{x \to -2^+} [\, (2x^2 + 2)/(x + 2)\,] = 10/(0^+) = +\infty$, x = - 2 es una asíntota vertical de f(x)

Para la posición relativa $\lim_{x \to -2^-} f(x) = \lim_{x \to -2^-} [\, (2x^2 + 2)/(x + 2)\,] = 10/(0^-) = -\infty$

Como la función es un cociente de polinomios con el numerador un grado ms que el denominador, tiene una asíntota oblicua (A.O.) y = mx + n, que es la misma en + ∞ y en - ∞

y = mx + n

con m = $\lim_{x\to\infty} [\, f(x) / x\,] = \lim_{x\to\infty} [(2x^2 + 2)/(x^2 + 2x)] = 2$

n = $\lim_{x\to\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to\infty} [\, (2x^2 + 2)/(x + 2) - 2x\,] = \lim_{x\to\infty} [\, (2x^2 + 2)/(x + 2) - 2x\,]$ =

= $\lim_{x\to\infty} [\, (- 4x + 2)/(x + 2)\,] = - 4$

Luego la asíntota oblicua es y = mx + n = 2x – 4

(b)

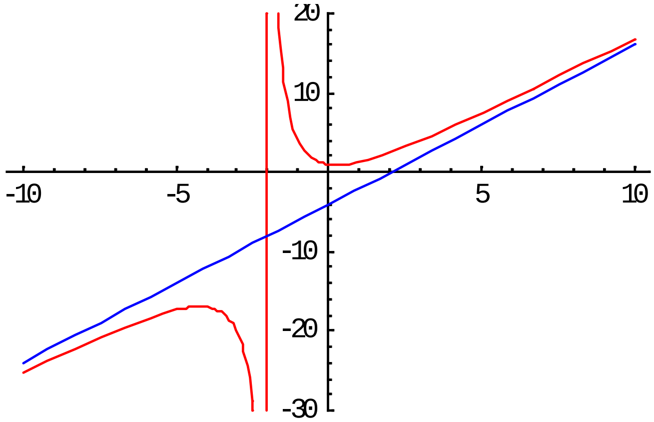
Posición relativa

La de la asíntota vertical ya la hemos visto. La de la oblicua es

Como $\lim_{x\to\infty} [\, (2x^2 + 2)/(x + 2) - (2x - 4)\,] = 0^+$, f(x) está por encima de la A.O. en + ∞

Como $\lim_{x\to-\infty} [\, (2x^2 + 2)/(x + 2) - (2x - 4)\,] = 0^-$, f(x) está por debajo de la A.O. en - ∞

Aunque no la piden la gráfica de la función y de la asíntota oblícúa es



Ejercicio 3 de la Opción B del modelo 5 de 2003.

Considera la matriz M(x) = $\begin{pmatrix} 2^x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, donde x es un número real.

(a) [1'5 puntos] ¿Para qué valores de x existe $(M(x))^{-1}$? Para los valores de x obtenidos, calcula la matriz $(M(x))^{-1}$.

(b) [1 punto] Resuelve, si es posible, la ecuación M(3).M(x) = M(5).

Solución

M(x) = $\begin{pmatrix} 2^x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(a)

Existe $(M(x))^{-1}$ si y solo si su determinante es distinto de cero, es decir $|M(x)| \neq 0$

$|M(x)| = \begin{vmatrix} 2^x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2^x \neq 0$, porque la exponencial 2^x siempre es positiva.

La inversa es $(M(x))^{-1} = (1/|M(x)|).\ \mathrm{Adj}(M(x))^t$

$(M(x))^t = \begin{pmatrix} 2^x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \end{pmatrix}$; $\mathrm{Adj}(M(x))^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^x & -x.2^x \\ 0 & 0 & 2^x \end{pmatrix}$

$$(M(x))^{-1} = (1/|M(x)|).\ \mathrm{Adj}(M(x))^t = (1/2^x).\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^x & -x.2^x \\ 0 & 0 & 2^x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2^x} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{-x} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b)

Para resolver la ecuación M(3).M(x) = M(5), multiplicamos por la izquierda por la inversa de la matriz M(3)

$(M(3))^{-1}.(M(3).M(x)) = (M(3))^{-1}.M(5)$,

$I.M(x) = (M(3))^{-1}.M(5)$,

$$M(x) = (M(3))^{-1}.M(5) = \begin{pmatrix} 2^{-3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 2^5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 4 de la Opción B del modelo 5 de 2003.

[2'5 puntos] Halla la perpendicular común a las rectas $r \equiv \begin{cases} x = 1 + \alpha \\ y = \alpha \\ z = -\alpha \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x = \beta \\ y = 2 + 2\beta \\ z = 0 \end{cases}$.

Solución

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + \alpha \\ y = \alpha \\ z = -\alpha \end{cases} \quad y \quad s \equiv \begin{cases} x = \beta \\ y = 2 + 2\beta \\ z = 0 \end{cases}.$$

Un punto de r es A(1,0,0) y un vector director de r es **u** = (1,1,-1)
Un punto de s es B(0,2,0) y un vector director de s es **v** = (1,2,0)
La recta perpendicular comun t tiene como vector director uno perpendicular a ambos es decir **w** producto vectorial de los vectores **u** y **v**.
Se suele dar la recta t como intersección de dos planos π_1 y π_2.
π_1 contiene a la recta r y al vector **w** es decir $\pi_1 \equiv$ det(**x – a, u, w**) = 0.
π_2 contiene a la recta s y al vector **w** es decir $\pi_2 \equiv$ det(**x – b, v, w**) = 0.

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{i}(2) - \mathbf{j}(1) + \mathbf{k}(1) = (2,-1,1)$$

$$\pi_1 \equiv \det(\mathbf{x - a, u, w}) = 0 = \begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (x-1)(0) - y(3) + z(-3) = -3y - 3z = 0$$

$$\pi_2 \equiv \det(\mathbf{x - b, v, w}) = 0 = \begin{vmatrix} x & y-2 & z \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (x)(2) - (y-2)(1) + z(-5) = 2x - y - 5z + 2 = 0$$

La recta t perpendicular a la vez a r y a s es $t \equiv \begin{cases} -3y - 3z = 0 \\ 2x - y - 5z + 2 = 0 \end{cases}$